



# 目次

序	iii
訳者序	v
謝辞	vi
<b>6 2次差分方程式に基づくモデル</b>	<b>1</b>
6.1 $R^2$ の写像の起源 遅延および結合ロジスティック写像; 拡大相空間 ( $R^2 \times I$ ) におけるポアンカレ断面; 保測写像; 非保存写像 対 保存写像; レヴィンソン・スミス緩和振動子; エノン・ハイレス ハミルトニアン	1
6.2 回転数と巻き数 写像と流れ; 結び目; 運動の代数的定数	8
6.3 カートライト・リトルウッド, レヴィンソン, レヴィ解析 強制自己励起振動子の解の異常族 $K_0$ ; ベルヌーイ列との同等性; レヴィの拡張	14
6.4 $R^2$ の抽象的な非保存写像 エノン写像; ストレンジ・アトラクター; 縮小写像; 幾何学的に荒々しい集合 対 力学的に荒々しい集合; リャプノフ指数; 周期3は $R^2$ ではカオスを意味しない; 吸引の鉢の間のフラクタル境界; ジュリア集合とマンデルブロー集合; ニュートン写像	19
6.5 標準写像; ねじれ写像 振動する面の上の球; マイクロトロン加速器; 周期ポテンシャルにおける調和格子; トーラス状の磁場; ねじれ写像;	29
6.6 '近可積分'系 ポアンカレ最後の幾何定理; 双曲および楕円不動点; 安定および不安定多様体; ホモクリニックおよびヘテロクリニック点; KAM 曲面; ポアンカレのカオス的絡みあい; ベルヌーイ列	35
6.7 KAM 曲線の分解 小分母; 無理回転数; 計算機による研究; 連分数表示; 標準写像と黄金数	49
6.8 数学的カオスにおける物理的規則性 カオス的磁力線と微分可能な磁場	56
6.9 チリコフの共鳴重合判定基準 周期的にキックされる振動子の例	58
6.10 数値的ポアンカレ写像と不連続ダイナミックス エノンの積分法	62

6.11	エノン・ハイレスと戸田・ハミルトン系 非可積分系と可積分系のポアンカレ写像	64
6.12	$R^2$ および $T^2$ 上の抽象保測写像 エノン写像; 包含写像; アーノルドの猫写像; 混合性	69
6.13	集合の写像 周期強制保存振動子の折り畳みとねじれ	79
6.14	格子上の写像 ラヌーの標準写像の研究と $n \times n$ 格子上での拡張; ランダム写像族; 格子上のアーノルドの猫写像; 短いポアンカレ再帰, ゴースト	81
6.15	ダイナミック・エントロピーと情報生成 相空間の分割の攪拌; コルモゴロフ・ シナイ エントロピーと位相的エントロピー; 情報理論的説明	88
6.16	エピローグ: 1つ屋根の下の, 規則性-規則性, 規則性-カオス, カオス-カオス 練習問題に対する注釈	103 104
<b>7</b>	<b>3次微分系に基づくモデル</b>	<b>109</b>
7.1	3次線形方程式 不動点の特徴づけ; 安定, 不安定, 中心多様体, 流れのさまざまな 表現	110
7.2	非線形流れ 中心サイクル, 鞍状サイクル; ポアンカレの再帰写像; 局所メビウス帯 多様体; 隣接する鞍状-結節または螺旋結節からの '相互作用のある' 流れ	116
7.3	ローレンツ・モデル 歴史的由来; $r$ の関数としての不動点の分岐; 縮小および大域 的吸引性の特徴	121
7.4	ローレンツのカオス的力学 ローレンツ '写像'; ローレンツのフラクタル 'マッチ'; ストレンジ・アトラクター	127
7.5	'ローレンツ力学' 流体系 ローレンツ方程式にしたがう円環管内の流体の流れ	131
7.6	ダイナモ・ダイナミックス 地球磁場の驚くべきダイナミックス; (ローレンツ系に) 類似なカオス・ダイナミックスをもつ物理的には無関係な簡単な円盤ダイナモ	135
7.7	ローレンツのホモクリニック分岐とヘテロクリニック分岐 最初のホモクリ ニック分岐より上で最初のヘテロクリニック分岐より下の $r$ に対する流れの大域位 相的性質—複雑に込み入った描像; '前乱流'	141
7.8	ローレンツ・ホップ分岐 劣臨界分岐	154
7.9	各種のパラメータ値のローレンツ・ダイナミックス 安定極限サイクル低調和 (鞍状-結節) 分岐; メビウス帯と結び目のある極限サイクル; 間欠性; 2重安定性; それとカオスについてたくさん!	154
7.10	リャプノフ指数 定義とその指数を得るための方法; ローレンツ系への応用と2重 安定性	164
7.11	レスラーのモデル モデル化に対する 'もち上げ' 法による取り組み; モデル $R^1$ , リャ プノフ指数, ポアンカレ写像, ローレンツ '写像' とコントロール集合; 'ステッキ' 折り畳み と第2コントロール集合; 低調和分岐; 最大のリャプノフ指数, 漏斗状アトラクター, 相コ ヒーレンス, ダリの極限サイクル; モデル $R^2$ , 2重安定カオス; 回転盤上のあめ機械の 流れ	171

7.12	リャプノフ指数とストレンジ・アトラクターの次元 可能な関係についての 発見的議論;カプラン・ヨークの予想 . . . . .	188
7.13	開放系・化学振動 ベロウソフ・ジャボチンスキーの発見;フィールド・ノイエスの 'オレゴネイター';緩和振動子 . . . . .	192
	練習問題に対する注釈 . . . . .	196
<b>8</b>	<b>'中間次数の' システム</b>	<b>199</b>
8.1	線形系 ポアンカレの変分方程式;不動点近傍, 漸近的性質 (リャプノフ指数) そして 周期的および概周期的係数をもつ場合;格子基準モードとシュレディンガーの解 . . . . .	200
8.2	チューリングの線形の化学的形態形成システム . . . . .	207
8.3	'可積分' ハミルトン系 $n$ 次元トーラス上の運動;隣接状態の分離 . . . . .	212
8.4	コルモゴロフ・アーノルド・モーザーの定理 '近可積分' 系 . . . . .	218
8.5	ポアンカレの定理とフェルミの定理;アーノルド拡散 . . . . .	220
8.6	フェルミ・パスタ・ウーラム (FPU) 現象と等分配 エネルギーの非等分配; 'シナジェティックス'の初期の例;等分配とエルゴード性;不可逆性の影響 (格子熱 伝導) . . . . .	223
8.7	分子モデル 戸田の指数ポテンシャル . . . . .	231
8.8	戸田格子における孤立波 1 および 2 '保存' 圧縮パルスの解析解;クノイド波 . . . . .	236
8.9	種々の戸田格子のダイナミックス フォード・スタッガード・ターナーの等質量 戸田格子の可積分性の数値的予測;フラッシュカとエノンの積分;2 原子戸田格子 ( $1 \geq m_1/m_2 \geq 0$ ) の '物理的' 重要性?;カオス挙動の影響と格子熱伝導 . . . . .	242
8.10	パウルベ特性と可積分性予想 可積分性の探索のためのコワレフスカヤの複素時間 の利用 . . . . .	254
8.11	化学振動と散逸開放系の構造 'ブラセレイター' と拡散的に結合されたブラセレイ ターチューリング構造) . . . . .	263
8.12	チューリングの形態形成方程式に関するスメールの解析 拡散を使った '死んだ' 要素から '生命' を生成する;大域的様相 . . . . .	269
8.13	高次散逸系のダイナミックスを低次元 $R^n$ へ埋め込む ターケンスとクラッチフ ィールド・ファーマー・パッカー・ショウの方法;トーラス結び目の例;化学反応と テイラー渦への応用 . . . . .	274
8.14	生きているシステムのダイナミックス 定義と問い;アイゲン・シュスターの ハイパーサイクルの擬種, エラー・カタストロフィー;複製方程式;平均適合;一般 ロトカ・ヴォルテラ方程式;ホフバウアーの定理, 位相軌道同値;スメールの観察 . . . . .	285
8.15	エピローグ: 開放系;開け胡麻! . . . . .	296
	練習問題に対する注釈 . . . . .	298
<b>9</b>	<b>ソリテール: ソリトンと非ソリトン</b>	<b>301</b>
9.1	格子の連続体極限と 'ソリテール' 解 . . . . .	302
9.2	リーマン不変量とコルトヴェーグ・ドフリース方程式 . . . . .	309

9.3	バーガーズ方程式と KdV 方程式の比較 散逸対分散 . . . . .	312
9.4	バーガーズ方程式の厳密解, ホップ・コール変換 . . . . .	315
9.5	逆散乱変換 (IST) に到る簡単な歴史 ザブスキーとクルスカルの‘ソリトン’の発見; 保存則; ミウラ変換; ‘シュレディンガー方程式’ . . . . .	317
9.6	KdV 方程式の一般解 ガードナー・グリーン・クルスカル・ミウラの解析; ゲルファント・レヴィタンの定理; 逆散乱変換 . . . . .	323
9.7	純ソリトン解 KdV 方程式; ランダウ・リップシッツ部分集合 . . . . .	329
9.8	ラックスの定式化 KdV の例 . . . . .	335
9.9	サイン・ゴールドン方程式 キンク; 位相ソリトン; プレザー・モード . . . . .	338
9.10	ソリトン理論における広田の‘直接法’ 広田の 2 項作用素; 非線形変換 (タイプ A,B,C); 双線形方程式と特別厳密解 . . . . .	345
9.11	IST の AKNS 定式化 (!! ) Ablowitz-Kaup-Newell-Segur のザハロフ・シャバットの 方法の拡張; サイン・ゴールドン, 双曲サイン・ゴールドン, 非線形シュレディンガー, 修正 KdV およびダイム方程式との IST 一般解の関連 . . . . .	352
9.12	差分方程式の間のベックルンド変換 ベックルンド変換; 可積分条件; 例 . . . . .	356
9.13	不変ベックルンド変換 自由パラメータ; 非線形重ね合わせ; リッカチ方程式 . . . . .	359
9.14	無限個の保存則 不変ベックルンド変換との関係 . . . . .	363
9.15	先へ進んで 高次元; 共鳴相互作用 . . . . .	365
	練習問題に対する注釈 . . . . .	368
<b>10</b>	<b>結合写像 (CM) とセル・オートマトン (CA)</b>	<b>371</b>
10.1	全体像 連続および離散の変数と関数をもつラグランジュ・モデルとオイラー・モデル	371
10.2	いくつかの結合写像 (CM) ロジスティック・ダイナミックスにしたがう拡散および 他の結合をするセル; 多重周期領域; 多周期の共存; ‘半周期的乱流’; 空間・時間間欠性; 非斉次 CM . . . . .	375
10.3	結合格子写像 (CLM = CA) 一般的な族; 大野・甲元の化学反応モデル; ‘乱流’, ‘ソリトン’ および周期的空間・時間パターン; 非周期, 可励起セル, 拡散的結合, 双安定セル . . . . .	386
10.4	一般的なセル・オートマトン (CA) フォンノイマンの問い; ウーラムの示唆; 定義されるダイナミックス . . . . .	394
10.5	‘合法的’セル・オートマトン 静止と対称条件 . . . . .	397
10.6	合法的 CA に対する一般的関連 CA 規則, 状態および様相に対する可能な 物理的關係 . . . . .	398
10.7	簡単な例 ‘自己増殖’ . . . . .	399
10.8	近傍様相と力学規則 規則数; ‘全体主義的’CA . . . . .	401
10.9	CA の力学特性のいくつかの分類 ダイナミックスの 4 つの定性的カテゴリー . . . . .	402
10.10	1 次元 CA のエントロピー ‘カオス’ または ‘乱流’ のエントロピー測定の可能性 と欠点 . . . . .	410

10.11	部分 CA 規則からの粒子状ダイナミックス 遅れがあるおよび遅れのない衝突する ‘粒子’；振動する‘分子’ . . . . .	415
10.12	2次元 CA フォンノイマン近傍；フレドキンの‘自己増殖’規則 . . . . .	418
10.13	エデンの園様相 力学的に起りえない様相；ムーアの定理 . . . . .	420
10.14	J.H. コンウェイの‘ライフ’ ムーア近傍；へび，池，ウインカー，蜜蜂の巣箱， はしけ，理髪店の広告塔，大食漢，グライダーとグライダー・ガン . . . . .	423
10.15	励起可能媒質 静止，興奮および休止状態 . . . . .	426
10.16	反転可能 CA と物理的ダイナミックス 反転可能对可逆ダイナミックス； 自然の記述，どのようにして達成できるか？，付録：フォンノイマンの問題 . . . . .	428
	練習問題に対する注釈 . . . . .	433
エピローグ：複雑系を‘理解’する 配列構造 (オーダー)，組織；最後の注意—モデル，因果律，不可逆性		439
付録 J	カートライト・リトルウッドとレヴィンソンの強制緩和振動子について	461
付録 K	スメールの馬蹄写像	470
付録 L	コルモゴロフ・アーノルド・モーザーの定理のノート	474
文 献		483
話題ごとの参考文献		513
索 引		549

## I 巻 の 目 次

### 非線形ダイナミクスに関連する概念

#### 1 はじめに . . .

- 1.1 . . . ポアンカレありき
- 1.2 ‘非線形現象’とは何か 射影，モデルおよび線形微分方程式と非線形微分方程式の関係
- 1.3 2つの神話 線形と解析的の神話
- 1.4 モデル化についての注意 純粋数学と‘経験的’数学
- 1.5 研究の順番と構成 ダイナミック次元，連続変数と離散変数；非線形ダイナミクスへの解析的，定性的，計算的および実験的アプローチ；ダイナミクスの複雑さへのしのびより