

目 次

訳者まえがき
まえがき

1 動機づけ

1.1 まえおき	3
1.2 Lebesgue 理論の目的	3
1.3 Lebesgue の業績	5
1.4 Lebesgue 理論の手法	7
1.5 他のアプローチ	8

2 積分の概念

2.1 まえおき	10
2.2 ‘原始関数’	11
2.3 面 積	14
2.4 Lebesgue 積分	17
2.5 Lebesgue 測度	20
2.6 Lebesgue の積分理論の構造	23
2.7 練習問題	24

3 Lebesgue 理論の手法

3.1 出発点	26
3.2 挟みうち法	26
3.3 Riemann 積分	30
3.4 単調列	33
3.5 無限積分	36
3.6 Dini 微分	37
3.7 練習問題	39

4 定義関数

4.1 まえおき	42
4.2 Boole 収束	44
4.3 開集合と閉集合	47
4.4 被覆定理	50
4.5 関数の定義関数	52
4.6 練習問題	53

測度ゼロの集合

5 単調関数の微分

5.1 まえおき	55
5.2 測度ゼロの集合	56
5.3 Cantorの点集合	58
5.4 測度論的平均密度	60
5.5 微分の問題	61
5.6 ‘朝日’の補題	63

目 次

5.7 単調関数の微分	67
5.8 単調関数列の微分	71
5.9 練習問題	73

1次元 Lebesgue 理論

6 外集合と内集合の幾何学的測度

6.1 まえおき	75
6.2 基本集合	76
6.3 有界な外集合	81
6.4 非有界な外集合	88
6.5 補集合の原理	88
6.6 内 集 合	90
6.7 練習問題	93

7 Lebesgue 測度

7.1 まえおき	95
7.2 外測度と内測度	96
7.3 Lebesgue 測度	100
7.4 可測集合の例	104
7.5 非有界集合	107
7.6 非可測集合	107
7.7 可測性の判定規準	108
7.8 単調な集合列	111
7.9 練習問題	113

8 有界な可測関数の Lebesgue 積分

8.1	まえおき	115
8.2	可測関数	116
8.3	測度関数	120
8.4	単関数	120
8.5	Lebesgue の挟みうち関数	123
8.6	Lebesgue-Young 積分	125
8.7	正の線形連続汎関数としての Lebesgue 積分	128
8.8	Lebesgue の不定積分の可微分性	136
8.9	練習問題	140

9 可積分関数の Lebesgue 積分

9.1	まえおき	141
9.2	可積分関数	142
9.3	可積分関数の Lebesgue 積分——正の線形‘連続’ 汎関数として	147
9.4	原始関数としての Lebesgue 積分	155
9.5	練習問題	160

d 次元 Lebesgue 理論

10 多重積分

10.1	まえおき	162
10.2	d 次元の基本集合	162
10.3	d 次元 Lebesgue 理論	165
10.4	Fubini の定理とは何か	168

目 次

10.5	定義関数に対する Fubini の定理	170
10.6	可積分関数に対する Fubini の定理	174
10.7	Tonelli の定理	177
10.8	積 集 合	178
10.9	Lebesgue 積分の幾何学的定義	181
10.10	d 次元における Fubini の定理	183
10.11	練習問題	184

11 Lebesgue-Stieltjes 積分

11.1	まえおき	186
11.2	重みつき測度	187
11.3	Stieltjes 積分の Lebesgue 表現	191
11.4	1次元における Lebesgue-Stieltjes 積分	194
11.5	2次元における Lebesgue-Stieltjes 積分	195
11.6	練習問題	198

12 おわりに

12.1	Lebesgue 積分の一般性	199
12.2	Lebesgue 積分の記述的定義	199
12.3	測度関数	202
12.4	Young 積分	204
12.5	参考文献	207

付 録

1	連続関数の極限の連続性	211
2	Lebesgue 可測集合の定義の同等性	212
3	Riemann 積分と Lebesgue 積分との関係	215

4	Levi の定理と Fatou の補題	215
5	$\int_a^b \phi'(x)dx < \phi(b) - \phi(a)$ の実例	217
6	有界変動, 絶対連続と不定積分	219
7	定理11.5.1の証明	224
8	標準区間と有限加法族	224
	練習問題解答	225
	索引	245

