

目次

第 I 部 基礎編 (増田 久弥)	1
第 1 章 関数解析の基礎	3
1.0 関数解析について	3
1.1 ノルム空間・Banach 空間・Hilbert 空間	4
1.2 商空間	6
1.3 線形作用素	8
1.4 有界作用素の摂動	10
1.5 有界線形汎関数	11
1.6 一様有界性原理, 開写像定理, Hahn–Banach の定理	14
1.7 線形 Fredholm 作用素	17
1.8 Banach 空間に値をもつ関数の微分と積分	20
1.9 線形作用素のスペクトル	21
第 2 章 半群の理論: Hille–吉田の定理	25
2.1 半群とは	25
2.2 Hille–吉田の半群理論	27
2.3 Hille–吉田の定理の証明	29
2.4 非同次微分方程式	36
2.5 正則半群	39
2.6 発展方程式	42
第 3 章 非線形写像の微分法	45
3.1 微分と導関数について	45
3.2 非線形写像	47
3.3 Fréchet 微分と Gâteaux 微分	48
3.4 微分の性質: 和の公式, 連鎖律, 積の微分の公式	50
3.5 高階微分	52
3.6 Taylor の公式	55
3.7 偏微分	56

第 4 章	4 つの基本的な不動点定理	61
4.0	不動点定理について	61
4.1	Brouwer の不動点定理	63
4.2	Schauder の不動点定理	70
4.3	Banach の不動点定理 (縮小写像の原理)	72
4.4	順序集合上での不動点定理: Bourbaki-Kneser の不動点定理	75
4.5	Amann の順序集合上の不動点定理	79
4.6	一般化された Ascoli の定理	81
第 5 章	不動点定理のいくつかの応用	87
5.1	常微分方程式の解の存在 (Picard-Lindelöf の定理)	87
5.2	微分方程式の解の存在 (Peano の定理)	89
5.3	古典的陰関数定理	92
5.4	接線錐に関する Lyusternik の定理	96
第 6 章	分岐理論の基本	103
6.0	解の分岐とは	103
6.1	解の分岐	104
6.2	Lyapunov-Schmidt の還元理論	105
6.3	単純固有値からの分岐	106
6.4	Krasnoselski の結果	113
6.5	Hopf 分岐	114
6.6	自励系常微分方程式に対する Hopf 分岐	118
第 7 章	汎関数の極値問題	123
7.0	極値について	123
7.1	汎関数の最小化	125
7.2	制約条件の下での極値	125
7.3	下半連続性と凸性	128
7.4	Palais-Smale 条件と Ekeland の変分原理	132
7.5	Morse の変形の補題	136
7.6	ミニマックス原理, 峠の定理	137
7.7	Morse の補題の証明	139
第 8 章	多価写像の不動点定理とその応用	143
8.0	多価写像と不動点定理について	143
8.1	多価写像	145
8.2	多価写像に対する Banach の不動点定理	147
8.3	角谷の不動点定理とその一般化	149
8.4	変分不等式	150
8.5	Browder の不動点定理	153
8.6	von Neumann-Fan のミニマックスの定理	157
8.7	ゲーム理論と鞍点定理	162
8.8	Walras 均衡に関する数理経済学の基本定理	164

8.9	非協力ゲームに対する Nash の主定理	166
8.10	付録 線形位相空間の用語集	168
8.10.1	線形空間における Hahn–Banach 定理	168
8.10.2	位相空間	168
8.10.3	線形位相空間と局所凸空間	170
第 9 章	有限差分法に対する基礎理論	175
9.0	有限差分とは	175
9.1	離散化	176
9.2	差分法に関する Lax の同値定理	180
第 10 章	方程式の解の近似：Newton 法	191
10.0	Newton 近似について	191
10.1	Newton–Kantorovich の定理	198
10.2	簡易 Newton 法	204
10.3	ホモトピー法	209
10.4	区間解析 (1 次元の場合)	212
第 II 部	応用編	219
第 1 章	調和解析とその応用 (新井 仁之)	221
1.1	Fourier 級数と Fourier 変換をめぐって	221
1.1.1	調和解析の起源	221
1.1.2	Fourier 級数の収束問題	222
1.1.3	総和法, ノルム収束, 概収束	224
1.1.4	多重 Fourier 級数の収束問題とラプラシアンの特値分解	226
1.1.5	スペクトル分解の Bochner–Riesz 総和法	231
1.2	振動積分とその応用	233
1.2.1	第二種振動積分と Fourier 変換の制限	233
1.3	特異積分とその応用	236
1.3.1	特異積分の定義	236
1.3.2	Calderón–Zygmund 理論	238
1.3.3	Cauchy 積分の L^2 有界性	240
1.3.4	Tb 定理	245
1.3.5	1 変数から多変数へ — 回転法	247
1.3.6	Lipschitz 境界値問題への応用	248
1.4	調和解析, 多変数複素解析, 偏微分方程式の接点	253
1.5	確率論的な調和解析とその応用	254
1.5.1	マルチンゲール	254
1.5.2	拡散過程とマルチンゲール	256
1.5.3	マルチンゲールと調和解析	257
第 2 章	ウェーブレット解析とその応用 (吉川 敦)	267
2.1	はじめに	267

2.2	Fourier 級数と Fourier 変換	270
2.2.1	Fourier 級数	271
2.2.2	Fourier 変換	272
2.2.3	平行移動と相似変換	273
2.2.4	合成積と Fourier 変換	274
2.2.5	Poisson の和公式	276
2.3	連続ウェーブレット変換	277
2.3.1	Gabor 変換	277
2.3.2	Zak 変換	279
2.3.3	不確定性原理	280
2.3.4	Morlet 変換	281
2.4	枠, Riesz 基底	285
2.4.1	概直交列	285
2.4.2	枠, 双対枠, Riesz 基底	286
2.4.3	Balian-Low の定理	288
2.5	離散ウェーブレット	289
2.5.1	多重解像度分析	289
2.5.2	尺度フィルター	292
2.5.3	分析ウェーブレット関数	295
2.5.4	Daubechies の直交ウェーブレット	298
2.5.5	高次元の多重解像度分析	302
2.6	ウェーブレットをめぐって	303
2.6.1	関数空間とウェーブレット展開	304
2.6.2	ウェーブレットの可能性	307
第 3 章	粘性解の理論と応用 (石井 仁司)	311
3.1	粘性解の定義	312
3.1.1	1 階偏微分方程式の場合	312
3.1.2	不連続な関数への一般化	314
3.1.3	2 階楕円型方程式の粘性解	316
3.1.4	粘性解の基本的性質	321
3.1.5	半連続粘性解	322
3.1.6	L^p 粘性解	323
3.2	最大値原理	324
3.2.1	Hamilton-Jacobi 方程式に対する比較定理	324
3.2.2	上半連続関数に対する最大値原理	328
3.2.3	2 階方程式に対する比較定理	331
3.2.4	半凸関数に対する最大値原理	333
3.2.5	一様楕円型方程式に対する最大値原理	335
3.3	粘性解の存在	336
3.3.1	Perron の方法	336
3.3.2	増大作用素法	337
3.3.3	その他の方法	338
3.4	粘性解の連続性と微分可能性	338

3.4.1	1 階偏微分方程式の場合	338
3.4.2	退化楕円型方程式の場合	341
3.4.3	一様楕円型方程式の場合	341
3.5	粘性解の意味での境界値問題	343
3.5.1	境界値問題の解釈	343
3.5.2	境界値問題に対する比較定理	344
3.6	いくつかの応用	345
3.6.1	決定系の最適制御	345
3.6.2	確率最適制御	349
3.6.3	L^∞ 最適化	350
3.6.4	漸近評価	351
3.6.5	等高面法	353
3.7	無限次元空間上の粘性解	354
3.7.1	摂動最適化原理	354
3.7.2	非有界項をもつ Hamilton–Jacobi 方程式	357
3.8	補足	359
3.8.1	連立方程式系	360
3.8.2	超関数解と粘性解	360
3.8.3	その他	361
第 4 章	界面ダイナミクス — 曲率の効果 (儀我 美一)	375
4.1	はじめに	375
4.2	界面支配モデルの種々の例	378
4.2.1	平均曲率流方程式	378
4.2.2	非等方的平均曲率流方程式	384
4.2.3	Gauss 曲率流方程式	391
4.2.4	体積保存平均曲率流方程式	392
4.2.5	表面拡散流方程式	393
4.2.6	Mullins–Sekerka モデル	396
4.2.7	異方性に対する注意	399
4.3	自己交叉の発生, 凸性の消失, 順序非保存	399
4.3.1	凸性の保存	400
4.3.2	自己交叉の発生	402
4.3.3	順序保存性	404
4.3.4	解の挙動に対する種々の結果	405
4.4	退化放物性・強い放物性	406
4.4.1	退化性	407
4.4.2	強い放物性	410
4.5	むすび	411
第 5 章	楕円型方程式 (鈴木 貴)	419
5.1	弱解の正則性	419
5.1.1	変分問題	419
5.1.2	Moser の反復法	426

5.1.3	Moser の反復法 (続)	433
5.2	Hardy 空間と BMO	439
5.2.1	BMO	439
5.2.2	Hardy 空間	448
5.2.3	L^∞ 評価と解の爆発	455
第 6 章	Navier–Stokes 方程式 (宮川 鉄朗)	471
6.1	Navier–Stokes 方程式	471
6.1.1	質量保存則	471
6.1.2	運動量保存則	472
6.1.3	境界条件	473
6.1.4	エネルギー保存則	474
6.2	定常問題	476
6.2.1	内部問題	480
6.2.2	外部問題	488
6.3	非定常問題	499
6.3.1	Stokes 作用素	499
6.3.2	弱解の理論	505
6.3.3	強解の理論	516
6.3.4	弱解への応用	521
6.3.5	Cauchy 問題	525
6.3.6	外部問題	528
6.3.7	外部定常解の安定性	530
6.4	結びにかえて	531
第 7 章	双曲型保存則系と衝撃波 (浅倉 史興)	537
7.1	保存則系	537
7.1.1	積分保存則と微分保存則	538
7.1.2	保存則系の例	538
7.2	双曲系	539
7.2.1	双曲系の特性方向場	540
7.2.2	積分曲線と Riemann 不変量	542
7.3	Riemann 問題	543
7.3.1	膨張波と衝撃波	543
7.3.2	Riemann 問題の解	549
7.3.3	解の近似	550
7.3.4	衝撃波の相互作用	551
7.4	エントロピー	553
7.4.1	エントロピーとエントロピー流束密度	553
7.4.2	エントロピーの漸近解 ($n = 2$)	556
7.5	大域解の存在	557
7.5.1	Glimm 差分法と波面追跡法	558
7.5.2	補償コンパクト性理論	567
7.6	諸結果	572

第 8 章 Schrödinger 方程式 (谷島 賢二)	577
8.1 量子力学と Schrödinger 方程式	577
8.2 自己共役問題と解の存在・一意性	582
8.3 解の存在と一意性 II	586
8.3.1 半群の理論による方法	587
8.3.2 積分方程式による方法 1	589
8.3.3 積分方程式による方法 2	591
8.3.4 解の smoothing 効果	593
8.4 基本解の滑らかさと有界性	595
8.5 スペクトルと解の時間発展	597
8.5.1 スペクトルの分類	597
8.5.2 RAGE 定理	600
8.5.3 時間周期系	601
8.6 散乱理論 I, 二体問題	604
8.6.1 重心座標の分離	604
8.6.2 波動作用素と散乱作用素	605
8.6.3 波動作用素の完全性の証明 I, Enss の方法	606
8.6.4 波動作用素の完全性の証明 II, 加藤 smooth と極限吸収原理	608
8.6.5 L^p - L^q 評価と閾値レゾナンス	614
8.7 散乱理論 II, N 体問題	615
8.7.1 クラスタ分解と重心座標の分離	616
索引	631